

§ 13-3 自感和互感

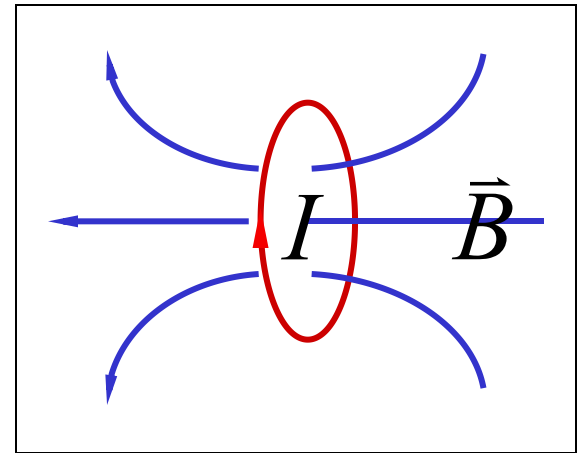
穿过闭合电流回路的磁通量

$$\Phi = LI$$

1) 自感定义1

$$L = \Phi / I$$

若线圈有 N 匝,



磁链

$$\psi = N\Phi$$

自感 $L = \psi / I$

注意

无铁磁质时, 自感仅与线圈形状、磁介质及 N 有关.

单位：1 亨利 (H) = 1 韦伯 / 安培 (1 Wb / A)

$$1\text{mH} = 10^{-3} \text{H}, \quad 1\mu \text{H} = 10^{-6} \text{H}$$

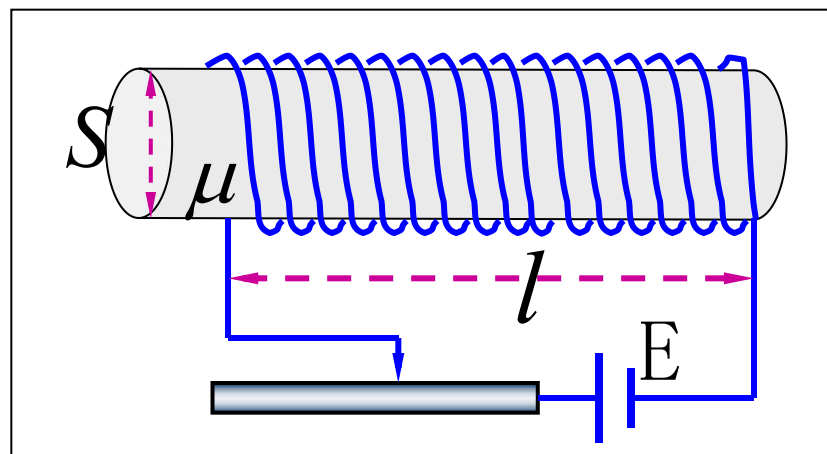
2) 自感电动势 $\varepsilon_L = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$

3) 自感的计算方法

例1 如图的长直密绕螺线管, 已知 l, S, N, μ , 求其自感 L . (忽略边缘效应)

解 先设电流 $I \rightarrow$ 根据安培环路定理求得 $H \rightarrow B$

$\rightarrow \Phi \rightarrow L$.



$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

$$B = \mu \frac{NI}{l}$$

$$\psi = N\Phi = NBS$$

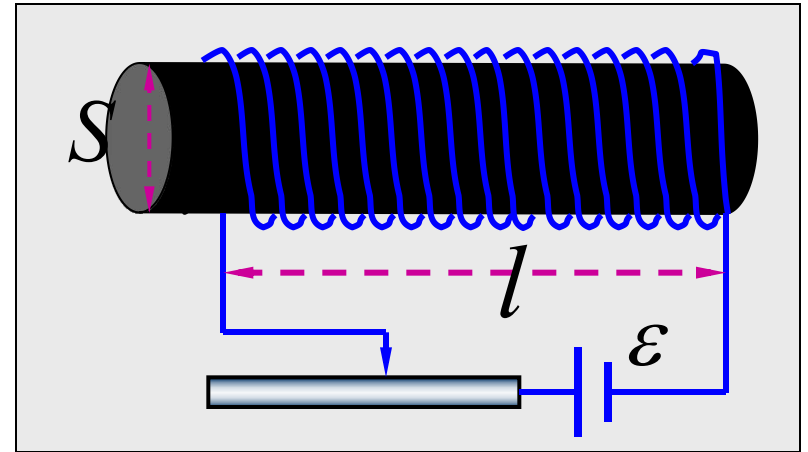
$$= N\mu \frac{N}{l} IS$$

$$\psi = N\mu \frac{N}{l} IS$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S$$

$$n = N/l \quad V = lS$$

$$\therefore L = \mu n^2 V$$



(一般情况可用下式
测量自感)

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

4) 自感的应用 稳流, LC 谐振电路, 滤波电路,
感应圈等

例 2 有两个同轴圆筒形导体，其半径分别为 R_1 和 R_2 ，通过它们的电流均为 I ，但电流的流向相反。设在两圆筒间充满磁导率为 μ 的均匀磁介质，**求其自感 L** 。

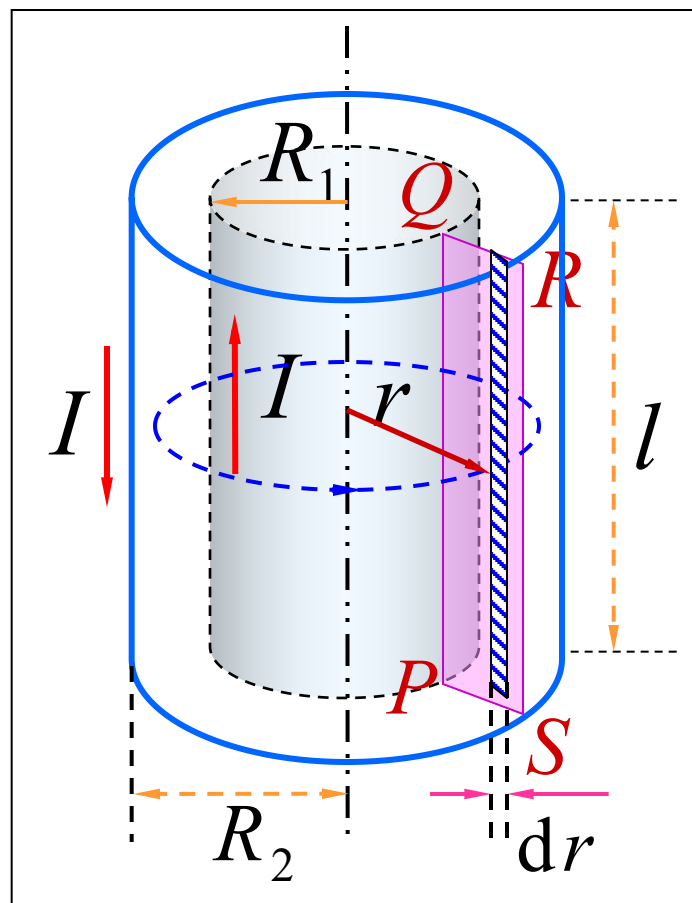
解 两圆筒之间
$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

如图在两圆筒间取一长为 l 的面 $PQRS$

并将其分成许多小面元。

$$\text{则 } d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B l dr$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr$$



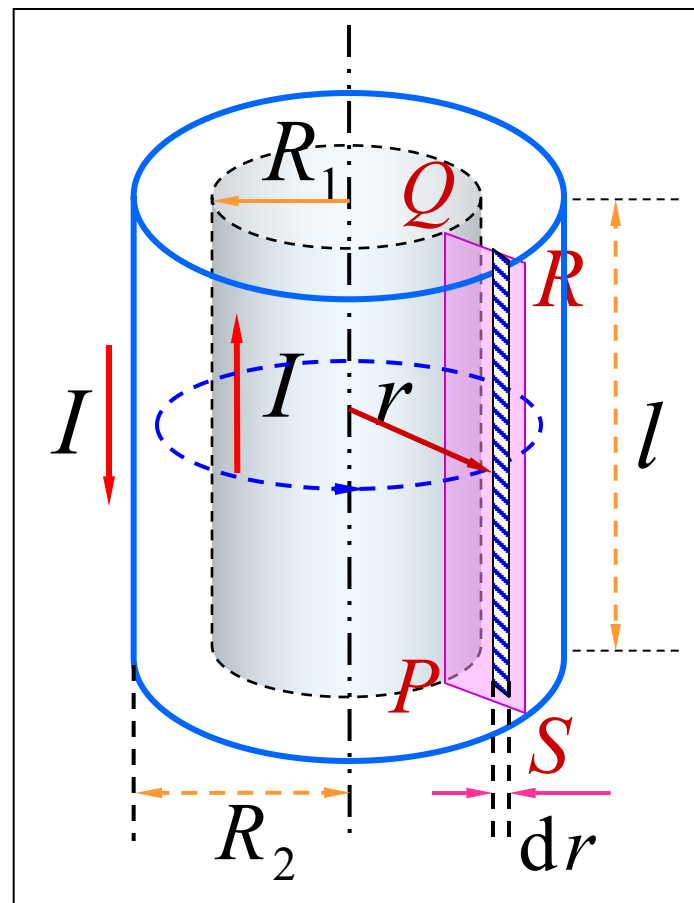
$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr$$

即
$$\Phi = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由自感定义可求出

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

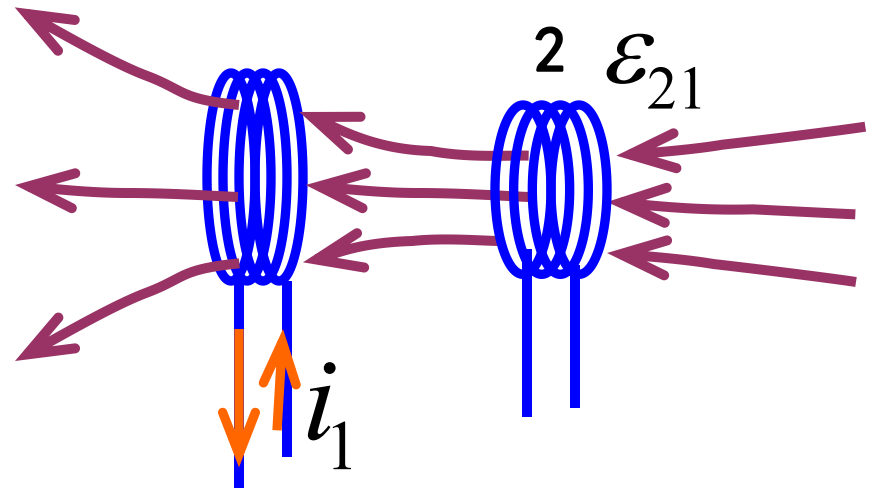
单位长度的自感为
$$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



互感

互感电动势：

当线圈 1 中的电流变化时，所激发的磁场会在它邻近的另一个线圈 2 中产生感应电动势；这种现象称为互感现象。该电动势叫互感电动势。



互感电动势与线圈电流变化快慢有关；与两个线圈结构以及它们之间的相对位置和磁介质的分布有关。

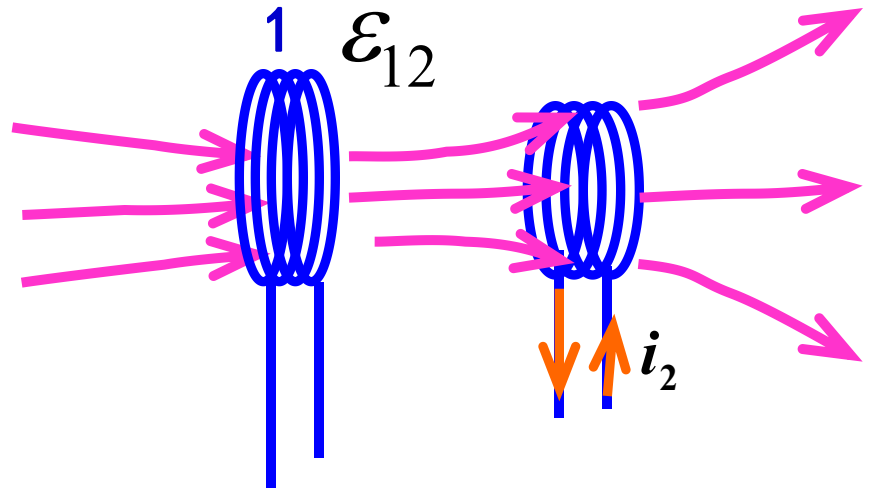
线圈 1 所激发的磁场通过线圈 2 的磁通链数

$$\Psi_{21} = M_{21} i_1$$

$$\text{互感电动势 } \varepsilon_{21} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

$$\Psi_{12} = M_{12} i_2$$

$$\mathcal{E}_{12} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$



后面将从能量观点证明两个给定的线圈有：

$$M_{21} = M_{12} = M$$

M 就叫做这两个线圈的互感系数，简称为互感。

它的单位：亨利（H）

$$1H = 1 \frac{V \cdot s}{A} = 1\Omega \cdot s$$

练习1：如图，圆形小线圈 C_2 ，匝数 $N_2=50$ ，面积 $S_2=40\text{cm}^2$ ，把它放在半径为 $R_1=20\text{cm}$ ，匝数 $N_1=100$ 的大线圈 C_1 的圆心处，两者同轴共面。试求：

(1) 两线圈的互感；

(2) 当大线圈的电流以 $5\text{A} \cdot \text{s}^{-1}$ 的变化率减小时，小线圈中的感应电动势为多大？

解：(1) 设大线圈中通有电流为 I_1 ，由题设可知， $S_2 \ll S_1 = \pi R_1^2$ ，故可视 I_1 在面积 S_2 上各点激发的磁场相同，其值为 $B = N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$

通过 S_2 的磁链为 $\psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 B S_2 = N_2 N_1 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} S_2$

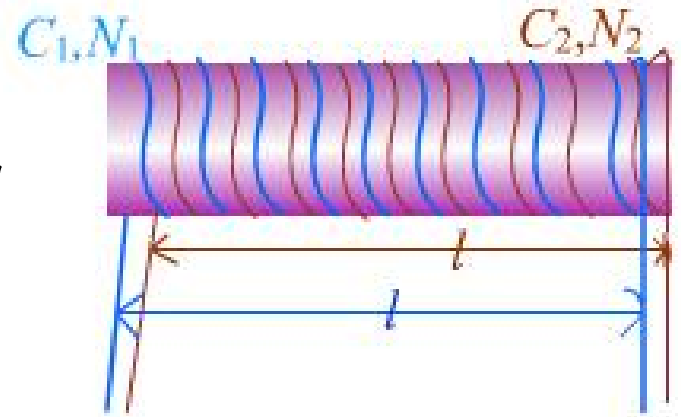
互感系数为 $M = \frac{\psi_{21}}{I_1} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 S_2}{2R_1}$

(2) 小线圈中的互感电动势为 $\varepsilon_M = -M \frac{dI_1}{dt}$

练习2: 如图，一长直螺线管线圈 C_1 ，长为 L ，截面积为 S ，匝数 N_1 ，在 C_1 上再绕另一与之共轴的线圈 C_2 ，其长度和截面积都与 C_1 相同，匝数为 N_2 导线。螺线管内磁介质的磁导率为 μ 。
求：(1) 这两个共轴螺线管的互感系数；
(2) 两螺线管的自感系数与互感系数的关系。

解: 1. 假想原线圈 C_1 中通有电流 i_1 ，
则螺线管内均匀磁场的磁感强度和磁通量分别为

$$B = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l}, \quad \Phi_m = BS = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l} S$$



所有磁感线都通过副线圈 C_2 ，即通过副线圈的磁通量也是 Φ_m ，

故副线圈的磁链为 $N_2 \Phi_m = \mu_0 \frac{N_1 N_2 i_1}{l} S$

按互感系数的定义式，对 N_2 匝线圈来说，当穿过每匝回路的磁通量相同时，应有 $M i_1 = N_2 \Phi_m$ ，由此得两线圈的互感系数为

$$M = \frac{N_2 \Phi_m}{i_1} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S$$

解：2. 在原线圈通电流 i_1 时，原线圈自己的磁通为

$$\Phi_m = \mu_0 \frac{N_1 i_1}{l} S$$

原线圈自己的磁链

$$\psi = N_1 \Phi_m = \mu_0 \frac{N_1^2 i_1}{l} S$$

原线圈的自感系数

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_m}{i_1} = \mu_0 \frac{N_1^2}{l} S$$

副线圈的自感系数

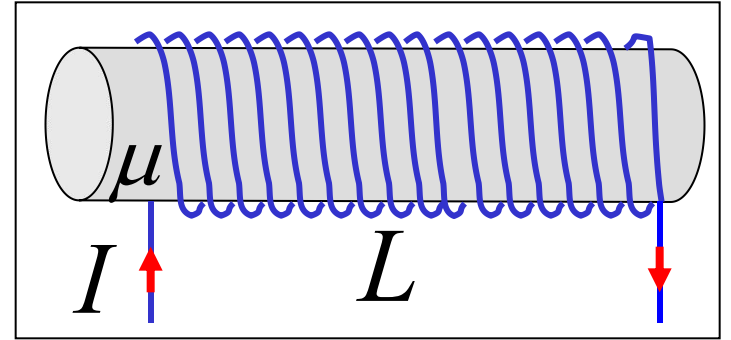
$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2}{l} S$$

故有

$$M^2 = L_1 L_2$$

◆ 自感线圈磁能

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$



$$L = \mu n^2 V, \quad B = \mu n I$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V \left(\frac{B}{\mu n} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} V = w_m V$$

◆ 磁场能量密度
矢量式

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH$$

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

与电场能量密度 $w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$ 比较

◆ 磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

◆ 磁场能量

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu} dV$$

磁场所储存的总能量：

$$W_m = \iiint_V w_m dV = \iiint_V \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} dV$$

积分应遍及磁场存在的全空间。

● 电磁场的能量密度：

$$w = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

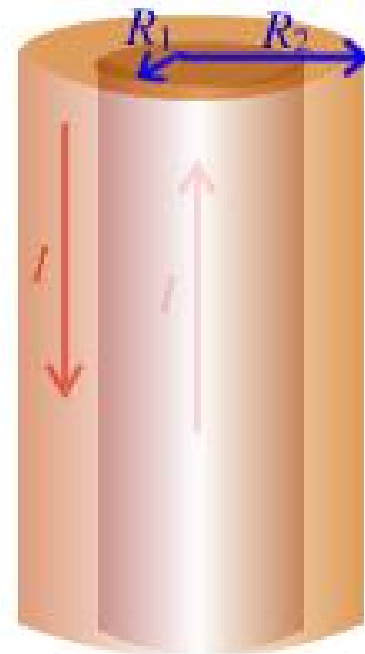
电场能量密度

磁场能量密度

电磁场的总能量：

$$W = \int_V w dV$$

练习1： 有一电缆，由两个无限长的同轴圆筒状导体所组成，内筒和外筒上的电流流向相反而强度 I 相等。设内、外圆筒横截面的半径分别为 R_1 和 R_2 ，试计算长为 l 的一段电缆内的磁场所储藏的能量。



解法一 内、外两圆筒之间的区域内离开轴线的

距离为 r 处的磁感强度为 $B = \frac{\mu_o I}{2\pi r}$

在该处的磁场能量密度为 $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_o} = \frac{\mu_o I^2}{8\pi^2 r^2}$

在半径为 r 与 $r+dr$ 、长为 L 的两个圆柱面所组成的体积元 dV 内，

磁场的能量为 $dW_m = w_m dV = \frac{\mu_o I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r L dr = \frac{\mu_o I^2 L}{4\pi} \frac{dr}{r}$

对上式积分，可得内、外圆筒之间磁场内储藏的总磁能

$$W_m = \int_V w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 L}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

解法二 磁场能量也可用 $W_m = L I^2 / 2$ 计算。

前面我们计算得到同轴电缆单位长度的自感系数为

$$L = \frac{\Phi_m}{i} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

因此，同轴电缆单位长度的自感磁能为

$$W'_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

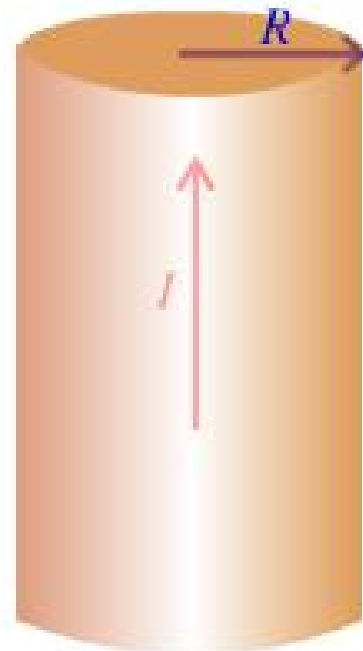
那么，长度为 l 的一段同轴电缆的自感磁能为

$$W_m = W'_m l = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

练习2： 设电流 I 均匀地通过一半径为 R 的无限长圆柱形直导线的横截面.

(1) 求导线内的磁场分布；

(2) 求证： 每单位长度导线内所储存的磁场能量
为 $\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$



解： 电流 I 均匀地分布在无限长圆柱形直导线的横截面上，通过导线横截面的电流密度为 $j = \frac{I}{\pi R^2}$

电流的分布具有轴对称性。今在圆柱形直导线内取逆时针绕向、半径 $r < R$ 的同轴圆形环路，按安培环路定理，有

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} (\pi r^2) = \mu_0 \frac{I r^2}{R^2} \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (r < R)$$

证明： 由分析知圆柱形直导线内的磁场分布为

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \quad (r < R)$$

导线内的磁场能量密度为 $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$

取一段长为 l 的导线，并在 r 处取 dr 厚的同轴圆柱壳，则此壳内的磁场能量为

$$dW_m = w_m dV = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4} 2\pi r l dr = \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} l dr$$

整个长度为 l 的圆柱形导线内的磁场能量为

$$W_m = \int_0^R \frac{\mu_0 I^2 r^3}{4\pi R^4} l dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi R^4} \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu_0 I^2 l}{16\pi}$$

单位长度的导线内储存的磁场能量为

$$W'_m = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$